Máquina de Turing e o Problema da Parada

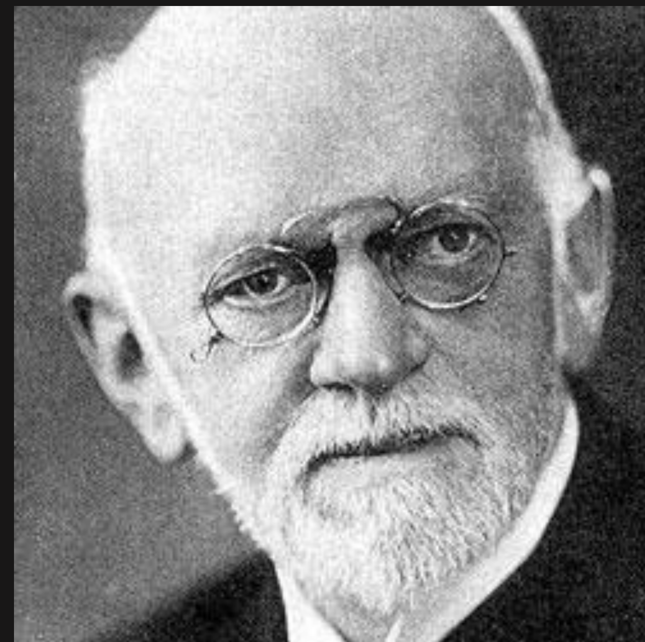
#12

Conjuntos Diofantinos e o 10º Problema de Hilbert

O 10º Problema de Hilbert

No ano de 1900, no 2º Congresso Internacional de Matemáticos, Hilbert propõe uma lista de 23 problemas matemáticos.

O 10º problema dizia o seguinte: *Verificar se existe um procedimento efetivo que verifique se uma dada equação diofantina possui ou não solução nos inteiros.*



David Hilbert (1862-1943)

O 10º Problema de Hilbert

No ano de 1970, o matemático russo Yuri Matiyasevich (utilizando todo o esforço anterior de matemáticos como a Julia Robinson, Hilary Putnam e Martin Davis) demonstrou que a resposta ao 10º problema de Hilbert é negativa.



Yuri Matiyasevich (1947-)

Polinômio

Definição 1: Um polinômio (com coeficientes inteiros) nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, denotado por $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma soma finita de expressões do tipo $c_i v_1 v_2 \dots v_j$ em que:

- Os coeficientes c_i são números inteiros
- v_k são variáveis

Exemplos:

- $P(x, y) = 2xxxyy = 2x^3y^2$
- $P(x, y, z) = xy + 3zz = xy + 3z^2$

Equação Diofantina e Conjuntos Diofantinos

Definição 2: Uma equação diofantina é uma equação do tipo $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, em que P é um polinômio com coeficientes inteiros nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Definição 3: Um conjunto D é dito diofantino sse existe um polinômio $P(x, y_1, y_2, .., y_j)$ tal que $x \in D$ sse existem valores inteiros $y_1, \ldots, y_j$ tais que $P(x, y_1, y_2, .., y_j) = 0$.

Equação Diofantina e Conjuntos Diofantinos

Exemplo: O conjunto dos números pares $H = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$ é diofantino.

Considere o polinômio $P(x, y) = x - 2y$.

Se $x \in H$, então,

- basta tomar $y = x/2$.

Portanto, $(\exists y) P(x, y) = 0$.

Se existe y tal que $P(x, y) = 0$, então

- $x - 2y = 0 \rightarrow$
- $x = 2y$

Portanto, x é par (ou seja, $x \in H$).

Conjuntos Diofantinos e o Problema da Parada

O que nos permite uma resposta negativa ao 10º problema de Hilbert é o seguinte resultado:

Teorema 1: Um conjunto é recursivamente enumerável se e somente se é diofantino.

Este teorema estabelece a equivalência entre os dois conceitos (conjunto r.e. e diofantino).

Conjuntos Diofantinos e o Problema da Parada

Vamos supor (por absurdo) que exista um algoritmo para checar se uma dada equação diofantina possui solução:



Dessa maneira, então podemos usar esse algoritmo para verificar se um dado elemento x pertence a um conjunto diofantino (Def. 3).
Logo, todo conjunto diofantino seria recursivo (decidível).

Conjuntos Diofantinos e o Problema da Parada

Juntando esse resultado com o teorema 1 (que diz que todo conjunto diofantino é r.e.), todo conjunto diofantino seria, então, recursivamente enumerável e recursivo.

Dessa forma, o conjunto K do problema da parada, sendo r.e., é diofantino (teorema 1) e, portanto, seria recursivo, contrariando o fato que ele **não é** recursivo (conforme provamos no vídeo 10).

Portanto, aquele algoritmo inicial não pode existir, e o 10º problema de Hilbert é insolúvel algoritmicamente.

Fim da série

- Máquinas de turing
- Computabilidade de funções
- Tese de Church
- Conjuntos r.e. e recursivos

Brevíssimas noções da teoria da computabilidade

- Problema da parada de Turing
- Incompletude de Gödel
- 10º Problema de Hilbert

Limites dos métodos formais em matemática

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br